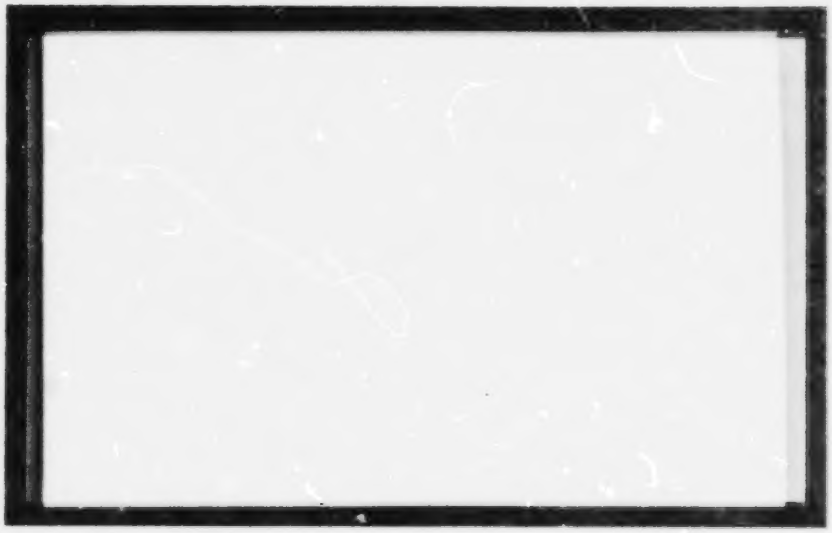
UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL



CENTRE DE RECHERCHE SUR LES TRANSPORTS

CASE POSTALE 6128, SUCCURSALE A, MONTRÉAL, QUÉBEC, H3C 3J7

L'AFFECTATION DE ZONES AUX VÉHICULES D'UN SERVICE DE MESSAGERIE

par

André Langevin* et François Soumis*

* École polytechnique de Montréal et Centre de recherche sur les transports, Université de Montréal.

Cette recherche a été rendue possible grâce à une subvention du Fonds F.C.A.R. du Québec et à une commandite de la Société canadienne des postes.

Cette étude a été publiée grâce à une subvention du fonds F.C.A.R. pour l'aide et le soutien à la recherche.

Université de Montréal
Centre de recherche sur les transports - Publication #513F
Mars 1987

Dépôt légal - 1er trimestre 1987

RÉSUMÉ

Nous avons étudié l'organisation suivante pour le problème de la cueillette et la livraison de lettres et colis en milieu urbain : la journée est divisée en tranches de temps durant lesquelles chaque véhicule part d'un centre de tri, se rend dans un secteur très précis de la région pour y effectuer la cueillette et la livraison de colis, puis revient au centre pour faire trier les colis ramassés pour livraison dans la tranche de temps suivante. Le but visé par cette approche est d'allouer une zone à chaque véhicule de façon à faciliter 1. la tâche du répartiteur et 2. la confection des itinéraires de chacun des véhicules. Nous avons mis au point une méthode qui permet de séparer une région urbaine en zones affectées, chacune, à un seul véhicule, de façon à minimiser le nombre total de véhicules utilisés ou la distance totale parcourue par l'ensemble des véhicules. La première partie de la méthode permet de déterminer chacune des zones et le nombre moyen de points à visiter dans chacune de celles-ci. Un premier raffinement de la méthode permet de tenir compte de la variabilité journalière de la demande dans chacune des zones. Un deuxième raffinement permet de déterminer les zones lorsqu'on permet un certain chevauchement de celles-ci de telle façon qu'un véhicule surchargé puisse être soulagé par un véhicule d'une zone adjacente.

1. Introduction

Le problème de la confection des meilleurs itinéraires possibles pour une flotte de véhicules affectés à la cueillette et la livraison de lettres et colis est un problème difficile à résoudre en raison de son caractère hautement combinatoire: l'augmentation exponentielle du nombre de solutions possibles en fonction du nombre de points à visiter empêche la conception d'une méthode optimale et générale de solution.

Une approche possible consiste à diviser le territoire à couvrir en zones affectées à chacun des véhicules, ce qui diminue la taille des problèmes de confection d'itinéraires à résoudre. Cet article examine la façon dont on peut déterminer ces zones de façon à obtenir la plus grande efficacité possible au niveau du transport.

Dans le problème que nous examinons, chaque véhicule doit, dans une période de temps fixe, partir d'un point central (dépôt où se trouve un centre

de tri), se rendre à la zone qui lui est affectée pour y effectuer la cueillette et la livraison de lettres et colis (il doit livrer ce qui a été ramassé durant la période précédente) et retourner au dépôt pour y faire trier ce qu'il vient de ramasser. Compte tenu du petit nombre de lettres et colis qu'un véhicule peut ramasser durant une période donnée, on considère qu'il n'y a pas de contraintes de capacité sur les véhicules.

Ce modèle s'applique au transport de lettres et petits colis en région urbaine, marché dont la croissance a été fulgurante durant les cinq dernières années en Amérique du Nord. La forme d'organisation considérée dans cet article devient intéressante lorsque le volume de la demande et la taille de la flotte sont suffisamment importants pour justifier l'utilisation d'un centre de tri.

Pour les besoins de l'analyse, nous considérons une région circulaire avec le dépôt situé au centre et les points à visiter distribués aléatoirement avec une densité qui décroit graduellement du centre vers la périphérie. Les points à visiter reposent sur un ensemble de rues formant un quadrillage fin rectangulaire ou en rayons et en arcs de cercle (ring-radial).

Le but de l'analyse qui suit est de déterminer la forme et l'orientation des zones de façon à minimiser le nombre de véhicules utilisés ou encore la distance totale parcourue par l'ensemble des véhicules.

Le modèle permettra de plus, de comparer certaines alternatives: offrir un service de cueillette avec livraison le lendemain, le même jour ou dans un intervalle de quelques heures. Enfin, certains raffinements du modèle permettent de tenir compte de la variation journalière de la demande dans chacune des zones et du chevauchement possible des zones de façon à diminuer les effets de celle-ci.

Newell et Daganzo[1986] ont étudié le problème du design des zones lorsque les véhicules ont des limites de capacité. Cependant, leur modèle ne s'applique pas au problème traité ici puisqu'il n'y a pas de relation directe entre la limite de temps et la limite de capacité à cause des temps de navette entre le dépôt et les différentes zones. Par contre, la première partie de notre analyse présentera des analogies avec celle de Newell et Daganzo.

Dans la section 2, nous allons rappeler quelques résultats présents dans la littérature sur lesquels s'appuiera la première partie de nos développements. Dans la section 3, nous présentons la méthode principale de découpage d'une région en zones, chacune affectée à un seul véhicule. Nous

réexaminons, dans la section 4, le découpage des zones en tenant compte de la variabilité journalière de la demande et nous traitons de la possibilité de chevauchement des zones dans le but de diminuer la variance de la demande et donc le nombre de véhicules nécessaires à une couverture adéquate de la région.

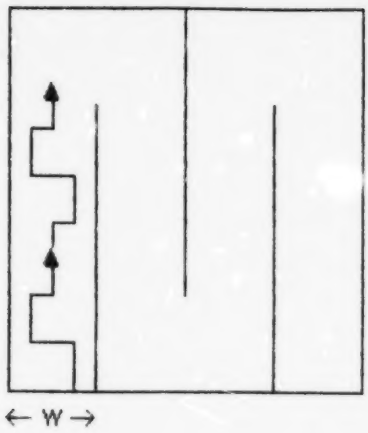
2. Revue de littérature

Pour pouvoir faire adéquatement la planification de zones pour la confection de tournées de véhicules, il est nécessaire de pouvoir estimer la longueur d'une tournée en fonction de la surface (et de la forme) de la zone. Larson et Odoni[1981] présentent la seule formule d'approximation connue: la longueur D d'une tournée optimale d'un véhicule visitant n points distribués aléatoirement et uniformément sur une zone de surface A est donnée par

$$D = k\sqrt{An}$$

Cette relation s'applique pour les métriques euclidienne et L_1. La valeur de k a été estimée à 0.765 (Stein[1978]) dans le cas euclidien, et elle n'est pas connue dans le cas de L_1. Cette relation n'est valable cependant que lorsque $n \geq 15$ et la surface suffisamment compacte et convexe (ronde ou carrée). Il n'a pas été démontré que cette formule demeurait valable pour des régions de forme allongée. On peut présumer que pour des régions allongées de même surface la longueur de la tournée soit plus longue. Aussi la formule d'approximation est-elle inutilisable dans notre contexte où l'on doit déterminer la forme appropriée des zones de façon à minimiser les temps de parcours et de navette: en effet, on obtiendrait en utilisant cette formule une solution avec toutes les zones en pointe de tarte issue du centre (de façon à minimiser le temps de navette), ce qui de toute évidence n'est pas optimal.

Daganzo[1984a] a développé une formule approximative pour estimer la longueur d'une tournée de tous les point à visiter d'une région basée sur une stratégie sous-optimale; cette méthode, qui donne une longueur quelque peu supérieure à celle de la tournée optimale dans le cas d'une région compacte, a l'avantage de s'appliquer aussi pour les zones étroites et allongées, contrairement à la formule précédente. La distance parcourue en utilisant cette stratégie est estimée à $0.9\sqrt{An}$ dans le cas euclidien et à $1.15\sqrt{An}$ dans le cas L_1. On peut s'attendre à ce que cette stratégie soit près de l'optimum pour des régions étroites. De plus, la construction des itinéraires est grandement facilitée si on utilise cette stratégie.



La stratégie consiste à découper une zone à couvrir suivant une bande de largeur w et à visiter les points dans l'ordre longitudinal de la bande. Daganzo[1984a] a déterminé que la largeur optimale de la bande, pour une métrique L_1, était:

$$w_0 = (3/\partial)^{1/2}$$

où ∂ est la densité (nombre de points par unité de surface).

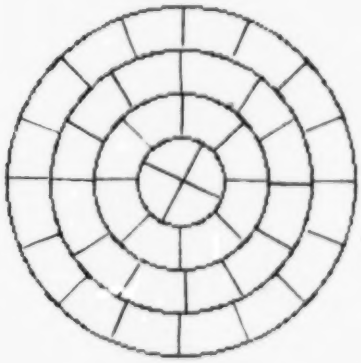
Newell et Daganzo[1986] ont montré que dans le cas d'une flotte de véhicules avec limite de capacité, les zones couvertes par chacun des véhicules devaient être de forme approximativement rectangulaire, allongée vers la source, et que l'ensemble des zones devait être disposé en anneaux concentriques.

Ils ont démontré, d'autre part, que la largeur optimale d'une bande d'une zone rectangulaire demeurait valable dans un secteur d'un anneau concentrique (du moins lorsque le secteur est approximativement rectangulaire). Aussi, pour minimiser le temps de navette, il suffit que la bande debute et se termine sur le côté du secteur le plus près de la source. De plus, chacune des zones est divisée en deux bandes de telle sorte que le véhicule ne fasse qu'un aller-retour dans celle-ci.

On trouve dans la littérature un certain nombre d'autres travaux sur les méthodes approximatives de planification stratégique en fonction de la distribution de la demande: Burns et al.[1985], Daganzo[1978,1984b,c, 1985a,b,c,], Daganzo et Newell[1986], Newell et Daganzo[1986b,c] et Han [1984]. Ces travaux portent sur des problèmes différents de celui traité dans cet article et, conséquemment, ne seront pas explicités ici.

3. Design des zones

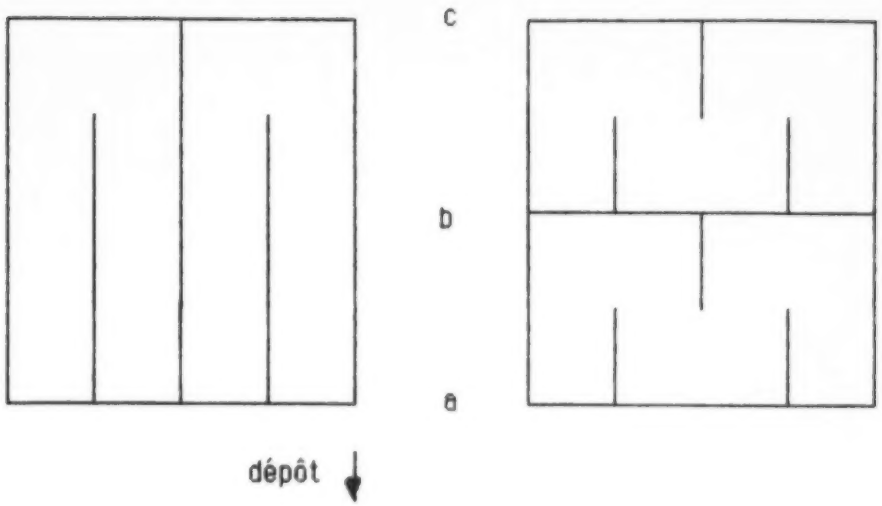
Si l'on découpe une région circulaire suivant des zones approximativement rectangulaires et allongées vers le centre, nous obtenons un ensemble de zones disposées en anneaux concentriques:



Nous allons examiner de quelle façon on doit découper les zones i.e. spécifier les rayons intérieurs et extérieurs de chaque anneau et le nombre N_k de zones par anneau.

3.1. Formulation

Nous allons considérer que chacun des secteurs est de largeur approximativement 2w de facon à ce qu'un véhicule ne fasse qu'un aller-retour dans celle-ci, à partir du point le plus près de la source. Le fait de commencer et terminer la tournée des points de cueillette et de livraison d'un secteur sur le coté le plus près du centre minimise la distance de navette. D'autre part, utiliser des zones de largeur 2w pour ne faire qu'un seul aller-retour se justifie par la perte d'efficacité qu'entraîne l'augmentation de la distance de navette si on utilise des zones de largeurs 2iw avec i>1 et entier. On peut comparer, par exemple, les solutions de deux décompositions d'une région, l'une en deux zones de largeur 2w et l'autre en deux zones de largeur 4w: les quatre zones ainsi formées sont de surfaces égales et peuvent être servies dans le même temps par un véhicule.



solution 1: 2 zones de largeur 2w solution 2: 2 zones de largeur 4w
(a, b et c sont les distances mesurées depuis le dépôt)

La solution 1 donne une distance totale :

$$D_1 = 2k\sqrt{An} + 4a$$

où A est la surface d'une zone et n le nombre de points à visiter. La solution 2 donne une distance totale:

$$D_2 = 2k\sqrt{An} + 2a + 2b$$

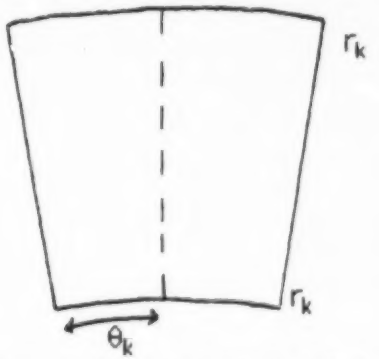
On a donc $D_2 - D_1 = 2(b-a) > 0$. La solution 1 est donc préférable.

Pour évaluer la distance totale parcourue par l'ensemble des véhicules, nous allons séparer la distance parcourue par le véhicule en distance radiale (incluant la distance de navette du dépôt à la zone aller-retour) et distance transverse.

Si la densité des points varie en fonction du rayon ($\partial(r)$), alors le nombre de points dans le $k^{ième}$ anneau de rayon intérieur r_{k-1} et de rayon extérieur r_k est donné par:

$$\int_{r_{k-1}}^{r_k} 2\pi\partial(r)r\,dr$$

Pour un secteur de cet anneau (chaque secteur correspond à la région affectée à un seul véhicule), θ_k correspond à la moitié de l'angle.



La distance totale transverse dans un anneau est donnée par:

$$\int_{r_{k-1}}^{r_k} 2\Pi\partial(r)\theta_k r^2 dr/3 \qquad \text{avec } \theta_k = \Pi/N_k$$

où N_k est le nombre de véhicules (ou de secteurs) dans le $k^{ième}$ anneau

La distance totale transverse peut donc s'écrire:

$$\int_{r_{k-1}}^{r_k} \frac{2\Pi\partial(r)\Pi r^2 dr}{3N_k} = \frac{2\Pi^2}{3N_k}\int_{r_{k-1}}^{r_k} \partial(r) r^2 dr$$

Devant partir du dépôt au centre de la région circulaire, se rendre à la zone qui lui est affectée, effectuer la cueillette et la livraison dans sa zone puis revenir au dépôt dans un temps fixe, chaque véhicule d'un anneau doit donc satisfaire la contrainte temporelle suivante (on a une contrainte par anneau):

temps de parcours local + temps de livraison + temps de navette $\leq$ T (1)

où T est la période de temps considérée

Le **temps de parcours local** (T_1), pour un véhicule du $k^{ième}$ anneau, est le temps du trajet pour faire le tour de tous les points de cueillette et de livraison de la zone considérée. Pour l'obtenir, on doit diviser par la vitesse v la somme du temps de déplacement transverse et du temps de déplacement radial:

$$T_1 = \frac{1}{V} \cdot \left[\frac{2\Pi^2}{3N_k^2} \int_{r_{k-1}}^{r_k} \partial(r) r^2 dr + 2(r_k - r_{k-1}) \right]$$

Nous appelons **temps de livraison** (T_2), pour un véhicule du k[ième] anneau, le temps de manutention pour effectuer la livraison (ou la cueillette) chez le client. Il est obtenu en multipliant le nombre de points à visiter dans un secteur par le temps de manutention (fixe) chez un client(t^{liv}):

$$T_2 = \frac{2\Pi}{N_k} \int_{r_{k-1}}^{r_k} \partial(r) r dr \cdot t^{liv}$$

Le **temps de navette** (T_3), pour un véhicule du k[ième] anneau, est le temps pour parcourir (aller-retour) la distance séparant le dépôt du rayon intérieur du secteur:

$$T_3 = \frac{2r_{k-1}}{V}$$

L'équation (1) s'écrit donc

$$T_1 + T_2 + T_3 \leq T$$

ou encore, pour un véhicule du k[ième] anneau:

$$\left[\frac{2\Pi^2}{3N_k^2} \int_{r_{k-1}}^{r_k} \partial(r) r^2 dr + 2(r_k - r_{k-1})\right]/V + \frac{2\Pi t^{liv}}{N_k} \int_{r_{k-1}}^{r_k} \partial(r) r dr + \frac{2r_{k-1}}{V} \leq 1 \qquad (2)$$

Le temps d'utilisation des véhicules dépend des N_k et des r_k qui doivent être déterminés de façon à satisfaire la contrainte (2) et à minimiser le nombre de véhicules ou la distance totale parcourue par l'ensemble des véhicules.

La fonction objective s'écrit:

$$\text{Min } D = \sum_k \left[\frac{2\Pi^2}{3N_k} \int_{r_{k-1}}^{r_k} \partial(r) r^2 dr + 2r_k N_k \right] \qquad (3a)$$

pour la distance totale ou

$$\text{Min } \sum_k N_k \qquad (3b)$$

pour le nombre total de véhicules.

3.2. Résolution

Nous allons reformuler le problème sous une forme plus facile à résoudre, puis nous allons montrer l'équivalence des objectifs (3a) et (3b) et finalement, nous présenterons l'algorithme de solution et des résultats.

3.2.1. Reformulation pour l'objectif de minimisation de la distance

Nous allons considérer le problème de la minimisation de la distance totale. La minimisation du nombre total de véhicules sera traitée à la section 3.2.2. Nous allons d'abord justifier le fait qu'à l'optimum, les contraintes (2) sont saturées (du moins pour les anneaux qui ne sont pas près du centre). Nous allons comparer deux solutions réalisables qui ne diffèrent que par la valeur de l'avant-dernier rayon (r_{k-1}) et démontrer que la solution avec le plus petit r_{k-1} domine l'autre.

Soient les N_k fixes, avec $N_k > N_{k-1}$, la solution A donne les rayons r_k, r_{k-1}, r_{k-2}, ... , r_1 et la solution B les rayons r_k, r'_{k-1}, r_{k-2}, ... , r_1 avec $r_{k-1} < r'_{k-1}$. La distance totale parcourue par les véhicules des deux derniers anneaux est:

$$D_A = \frac{2\Pi^2}{3N_k}\int_{r_{k-1}}^{r_k} \partial(r)r^2dr + 2r_kN_k + \frac{2\Pi^2}{3N_{k-1}}\int_{r_{k-2}}^{r_{k-1}} \partial(r)r^2dr + 2r_{k-1}N_{k-1}$$

pour la solution A et

$$D_B = \frac{2\Pi^2}{3N_k}\int_{r'_{k-1}}^{r_k} \partial(r)r^2dr + 2r_kN_k + \frac{2\Pi^2}{3N_{k-1}}\int_{r_{k-2}}^{r'_{k-1}} \partial(r)r^2dr + 2r_{k-1}N_{k-1}$$

pour la solution B.

Nous avons $D_B - D_A = \left[\frac{1}{N_{k-1}} - \frac{1}{N_k}\right]\frac{2\Pi^2}{3}\int_{r_{k-1}}^{r'_{k-1}} \partial(r) r^2 dr + 2N_{k-1}(r'_{k-1} - r_{k-1})$

Comme $N_k > N_{k-1}$, (hypothèse que l'on peut considérer comme raisonnable puisque l'on peut s'attendre à ce que, plus un anneau est éloigné du centre, plus le nombre de véhicules nécessaires à sa couverture soit élevé; cette hypothèse est d'ailleurs réalisée en pratique (voir sous-section 3.4)), alors $D_B - D_A > 0$ et la solution A est meilleure. Donc pour tous N_k fixes (et en particulier pour les N_k optimaux), la meilleure solution est obtenue en saturant les contraintes (2).

Afin de simplifier l'objectif (3a) et l'inéquation (2), nous allons utiliser une approximation linéaire de la fonction $\partial(r)$. Nous allons supposer que $\partial(r)$ est constante sur l'intervalle $[r_{k-1}, r_k]$ tout en variant d'un intervalle à l'autre. Dans le $k^{ième}$ intervalle, $\partial(r)$ est approximée par $\partial(r_k^*)$

où $r_k^* = (r_k + r_{k-1})/2$.

La fonction objective (3a) devient:

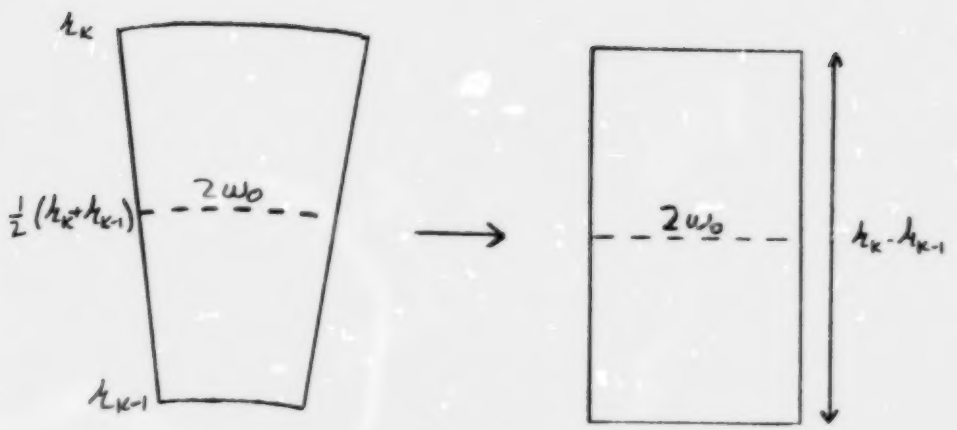
$$D = \sum_k \left[\frac{2\Pi\partial(r_k^*)(r_k^3 - r_{k-1}^3)}{9N_k} + 2r_k N_k\right] \qquad (4)$$

L'inéquation (2) devient:

$$\frac{2\Pi^2\partial(r_k^*)(r_k^3 - r_{k-1}^3)}{9N_k^2 v} + \frac{\Pi t^{hv}\partial(r_k^*)(r_k^2 - r_{k-1}^2)}{N_k} + \frac{2r_k}{v} \leq T \qquad (5)$$

Pour solutionner le programme mathématique formé de la fonction objective (4) et des contraintes (5), nous allons substituer à la fonction objective une relation qui correspond aux conditions d'optimalité. Ces conditions, décrites par Newell et Daganzo[1986], exigent que les secteurs aient la forme optimale décrite à la section 2, i.e. qu'ils aient une largeur égale à $2w_0$.

Un secteur d'un anneau peut être approximé par un rectangle de longueur $r_k - r_{k-1}$ et de largeur égale à la longueur de l'arc de cercle de rayon $(r_k + r_{k-1})/2$.



Pour le $k^{ième}$ anneau, le nombre de zones N_k est donné par

$$N_k = \frac{\text{circonférence moyenne}}{\text{largeur optimale de zone}} = \frac{2\Pi(r_k + r_{k-1})/2}{2w_0}$$

Or $w_0 = (3/\partial)^{1/2}$,

alors $$N_k = \frac{\Pi(r_k + r_{k-1})\partial^{1/2}}{2\sqrt{3}} \qquad (6)$$

L'inéquation (5) devient donc en remplaçant N_k par sa valeur et en utilisant $\partial(r_k^*)$ comme valeur de ∂:

$$\frac{8}{3v}\partial(r_k^*)(r_k^3 - r_{k-1}^3) + 2\sqrt{3}\partial^{3/2}(r_k^*)(r_k + r_{k-1})(r_k^2 - r_{k-1}^2)t^{liv} + \frac{2r_k}{v}\partial(r_k^*)(r_k + r_{k-1})^2 \leq \partial(r_k^*)(r_k + r_{k-1})^2 T \qquad (7)$$

3.2.2. Équivalence des objectifs

Nous allons démontrer que minimiser le nombre de véhicules est équivalent à minimiser la distance totale (pour tous les anneaux sauf possiblement celui du centre) et qu'ainsi la méthode précédente demeure valable pour l'un ou l'autre des objectifs.

Pour tous les anneaux sauf celui du centre, si l'on veut minimiser le nombre de véhicules, il faut que les véhicules soient toujours occupés. Soit $N' = \sum_{k\neq 1} N_k$, on a alors:

$N' \cdot T$ = temps total de déplacement + temps total de manutention

$$= \frac{D'}{v} + K$$

où D' est le déplacement total pour tous les anneaux sauf le premier et K, le temps (fixe) de visite de tous les points dans ces anneaux.

Ainsi, puisque T, v et K sont constants et positifs, minimiser N' revient à minimiser une fonction linéaire croissante de D' et est donc équivalent à minimiser D'.

3.2.3. Algorithme de solution

La méthode va consister essentiellement à trouver successivement les r_k à partir de l'anneau extérieur vers le centre en saturant à chaque fois l'inéquation (7). On est d'autant justifié d'utiliser cette approche que la contribution des anneaux extérieurs, contenant plus de zones, est certainement plus importante que celle des anneaux intérieurs.

1. A partir de l'anneau le plus à l'extérieur (r_k=R=rayon de la région), on trouve le r_{k-1} qui sature l'inéquation (7). On peut utiliser une méthode de bissection par exemple. Et l'on répète la procédure pour chacun des anneaux en allant vers le centre.

2. L'équation (6) nous permet de trouver, à partir des r_k, les N_k que l'on arrondit à l'entier le plus près.

3. On peut réajuster les r_k par l'équation (6) en utilisant les N_k entiers trouvés en 2.

4. On calcule la distance totale

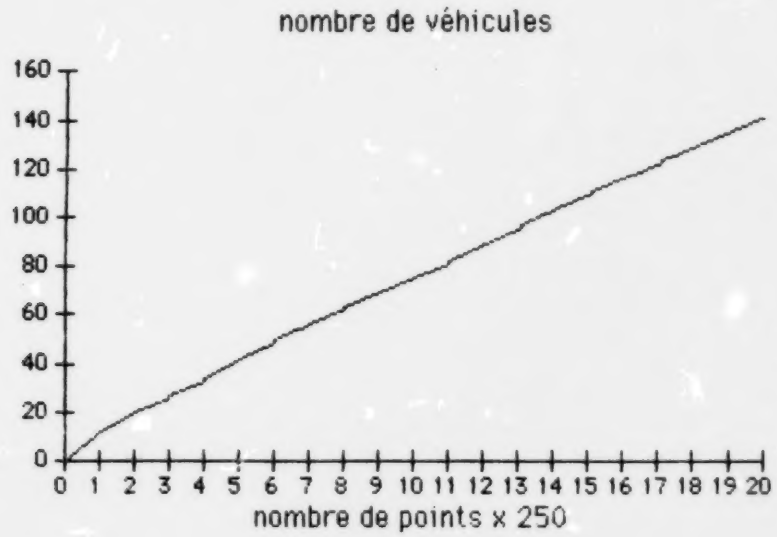
$$D = \sum_k \left[\frac{2\pi\partial(r_k^*)(r_k^3 - r_{k-1}^3)}{9N_k} + 2r_k N_k \right]$$

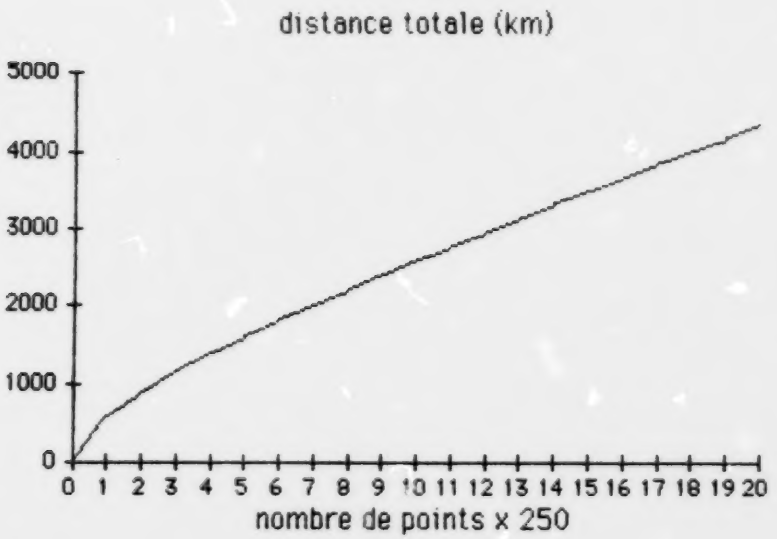
ou le nombre total de véhicules

$$\sum_k N_k$$

3.2.4. Résultats numériques

Nous avons utilisé l'algorithme précédent pour déterminer le découpage des zones en faisant varier les paramètres T, t^{liv} et n. Le rayon de la région a été fixé à 15 km et la vitesse des véhicules à 30 km/h. Les deux premiers tableaux présentent les résultats obtenus pour le nombre de véhicules et la distance totale parcourue en fonction du nombre de points à visiter avec T=4 h. et t^{liv}=5 min.





Ce dernier tableau fait clairement ressortir l'économie d'échelle obtenue à mesure que le nombre de points augmente.

Nous avons ensuite déterminé le découpage en donnant successivement les valeurs de 4, $2^2/_3$ et 2 h. au paramètre T (période de planification), 3 et 5 min. au paramètre t^{liv} (temps de livraison) et 1000, 2000, 3000, 4000 et 5000 au paramètre n (nombre total de points).

Nous avons observé que plus le temps de livraison diminue, plus la forme des zones s'allonge en direction du centre. De même, plus la période de planification est grande, plus la forme des zones est allongée. Ainsi, la forme est d'autant plus allongée que le nombre de points à visiter par un véhicule est grand. Nous avons aussi constaté que la forme des zones i.e. le rapport de la longueur sur la largeur varie peu en fonction de la densité. Nous présentons dans le tableau suivant les résultats obtenus pour n=3000:

T	2 h.		2.67 h.		4 h.	
t^{liv}	3 min	5 min	3 min	5 min	3 min	5 min
nombre d'anneaux	5	8	4	6	3	4
nombre de véhicules	145	221	99	146	60	89
distance totale(km)	4164	5657	3159	4118	2438	2969
nombre moyen de colis/véh.	20.6	13.6	30.4	20.5	49.9	33.6

On voit que plus la période s'allonge, plus le nombre de véhicules, la distance totale parcourue et le nombre d'anneau diminuent alors que le nombre moyen de colis par véhicule augmente.

Voici les résultats détaillés obtenus pour chacun des anneaux lorsque t^{liv}=5 et n=3000 (résultats obtenus après les étapes 1 et 2 de l'algorithme i.e. avant d'arrondir les résultats). Il faut noter que faire varier le paramètre t^{liv} à la baisse est équivalent à faire varier le paramètre T à la hausse.

anneaux	rayon intérieur (km)	nb de véh.	dist./véh. (km)	surf./véh. (km^2)	longueur/largeur
			T=4		
1	0	1.5	3.2	0.9	-
2	0.7	13.2	22.2	6.8	3.3
3	5.4	30.7	30.2	7.6	3.0
4	10.2	43.9	39.8	8.7	2.7
			T=2.67		
1	0	0.7	1.4	0.4	-
2	0.3	8.2	14.4	4.4	2.2
3	3.4	20.6	19.2	4.6	2.0
4	6.4	31.1	24.8	4.7	1.8
5	9.4	39.6	30.2	4.9	1.7
6	12.2	46.1	35.5	5.1	1.5
			T=2		
1	0	2.4	5.0	1.5	-
2	1.1	9.8	11.7	3.3	1.6
3	3.4	18.9	15.6	3.3	1.5
4	5.6	26.7	19.6	3.3	1.3
5	7.7	33.4	23.3	3.2	1.2
6	9.7	39.0	26.9	3.2	1.1
7	11.5	43.5	30.2	3.2	1.0
8	13.3	47.1	33.4	3.2	0.9

On voit que le nombre de véhicules par anneau et la distance parcourue par un véhicule augmentent du centre vers la périphérie. Le fait que la surface couverte par chacun des véhicules augmente aussi s'explique par la densité qui décroit vers la périphérie. On remarque que les surfaces deviennent de plus en plus carrées à mesure qu'on s'éloigne du centre.

Nous avons finalement comparé les résultats obtenus pour visiter 4000 clients en 4 heures avec ceux obtenus en visitant deux fois 2000 clients en 2 heures, ce qui correspond à passer d'un service de livraison la même journée à un service de livraison en une demi-journée.

	dist. totale (km)	nb de véhicules	dist./véh. (km)	# colis/véh.
4000 clients en 4h.	3680	117	31.4	34
2x(2000 clients en 2h)	8118	152	53.2	26

Ce changement de service entraîne une augmentation de 30% du nombre de véhicules requis. Cette augmentation demeure la même lorsqu'on utilise d'autres valeurs des différents paramètres.

Dans la section suivante, nous allons examiner de plus près le design des zones pour les anneaux les plus intérieurs.

3.3. Les anneaux intérieurs

La méthode précédente s'appuie sur le fait que les zones sont à peu près rectangulaires, et que pour une zone rectangulaire, on peut déterminer la largeur qui optimise la distance totale parcourue dans la zone. Cependant, pour les anneaux les plus près du centre, cette hypothèse de rectangularité n'est pas respectée et, particulièrement pour l'anneau le plus à l'intérieur, le nombre de véhicules n'est certainement pas optimal.

Aussi est-il nécessaire de reconsidérer la distribution des zones dans les 2 anneaux intérieurs. Nous examinons en même temps, lorsqu'il y a 2 anneaux, la possibilité de déplacer la frontière r_1 entre les deux zones.

3.3.1. Cas 1: un seul anneau (rayon=R)

Le problème à résoudre s'écrit:

$$\text{Min } D = \frac{2\Pi^2}{3N} \int_0^R \partial(r) r^2 dr + 2RN$$

ou (8)

$$\text{Min } N \quad \text{(nombre de véhicules)}$$

sous les contraintes

$$\frac{2\Pi^2}{3N^2 v} \int_0^R \partial(r) r^2 dr + \frac{2R}{v} + \frac{2\Pi t^{liv}}{N} \int_0^R \partial(r) r dr \leq T$$

N entier positif

Dans le cas où l'on veut minimiser N, le problème à résoudre peut s'écrire avec une notation simplifiée:

$$\text{Min } N$$

s. c.

$$\frac{c}{N^2} + \frac{d}{N} \leq e$$

N entier positif

L'unique contrainte peut s'écrire comme une inéquation du second degré:

$$eN^2 - dN - c \geq 0$$

avec

$$c = \frac{2\Pi^2}{3v} \int_0^R \partial(r) r^2 dr > 0$$

et $$e = T - \frac{2R}{v} > 0$$

(dans une période T, on doit avoir le temps de faire au moins un aller-retour du centre à la périphérie pour que le problème ait une solution).

Puisque c>0 et e>0, les deux racines ρ_1 et ρ_2 de l'équation $eN^2 - dN - c = 0$ sont de signes différents ($\rho_2>0$) et le domaine de solution se limite à $[\rho_2, \infty[$ puisque N doit être positif. On peut donc remplacer l'inéquation par

$$N \geq \rho_2 = \frac{d + \sqrt{d^2 + 4ec}}{2e}$$

Donc il suffit, pour solutionner le programme mathématique précédent, de prendre comme N* la racine positive ρ_2 et d'arrondir à l'entier supérieur ou égal à N*.

Dans le cas où l'on cherche à minimiser la distance totale, le problème peut s'écrire sous la forme simplifiée suivante:

$$\text{Min } \frac{a}{N} + bN$$

s. c.

$$N \geq \rho_2$$

$$N \text{ entier}$$

Le minimum de la fonction objective, si l'on ne tient pas compte de la contrainte, est obtenu pour $N^* = (a/b)^{1/2}$.

Si N* est réalisable, alors les trois seuls candidats-solution à considérer sont les arrondis supérieur et inférieur de N* et l'arrondi supérieur de ρ_2, la solution optimale étant la meilleure soluition réalisable des trois.

3.3.2. Cas 2: plus d'un anneau

Les véhicules du premier anneau n'étant pas utilisé à 100% durant la période T, nous allons reconsidérer la distribution dans les deux anneaux intérieurs, le 2ième anneau ayant comme rayon intérieur r_1 et comme rayon extérieur r_2 (fixe). Nous allons aussi reconsidérer l'emplacement de la frontière r_1 entre les deux premiers anneaux de façon à réoptimiser le déplacement global dans ceux-ci.

Le problème obtenu est alors le suivant:

$$\text{Min } D = \frac{2\Pi^2}{3N_1}\int_0^{r_1} \partial(r) r^2 dr + 2r_1N_1 + \frac{2\Pi^2}{3N_2}\int_{r_1}^{r_2} \partial(r) r^2 dr + 2r_2N_2$$

ou

$$\text{Min } N_1 + N_2 \quad \text{(nombre de véhicules)}$$

sous les contraintes

$$\frac{2\Pi^2}{3N_1^2v}\int_0^{r_1} \partial(r) r^2 dr + \frac{2r_1}{v} + \frac{2\Pi t^{liv}}{N_1}\int_0^{r_1} \partial(r) r dr \leq T$$

$$\frac{2\Pi^2}{3N_2^2v}\int_{r_1}^{r_2} \partial(r) r^2 dr + \frac{2r_2}{v} + \frac{2\Pi t^{liv}}{N_2}\int_{r_1}^{r_2} \partial(r) r dr \leq T$$

$$0 \leq r_1 \leq r_2$$

N_1, N_2 entiers positifs

Méthode de solution:

On peut faire varier r_1 de 0 à r_2, et pour chaque valeur de r_1, on calcule N_1 et N_2 ou la distance totale en appliquant séparément la méthode précédente à chaque anneau. Il est à noter que dans le cas du 2ième anneau,

nous obtenons le même problème que le problème (8) précédent, sauf que les bornes d'intégration sont r_1 et r_2 au lieu de 0 et R.

En résumé, l'affectation des zones se fait en deux temps: en premier lieu, l'affectation est faite de la périphérie vers le centre en saturant, pour chaque anneau, la contrainte (7). Puis, cette méthode ne donnant pas de très bon résultats près du centre, on reconsidère la confection des zones dans les deux anneaux centraux par la méthode que nous venons de décrire.

4. Variabilité de la demande

L'analyse précédente nous donne pour un certaine demande n, le nombre **moyen** n_k de points à visiter pour chacune des zones du $k^{ième}$ anneau. Lorsque les zones sont définies, le nombre de points à visiter par période T dans une zone du $k^{ième}$ anneau est distribué suivant une loi binomiale $b(n;p=n_k/n)$ qui peut être approximée par une loi normale de moyenne $\mu_k = n_k$ et de variance $\sigma_k^2 = n_k(1-n_k/n)$.

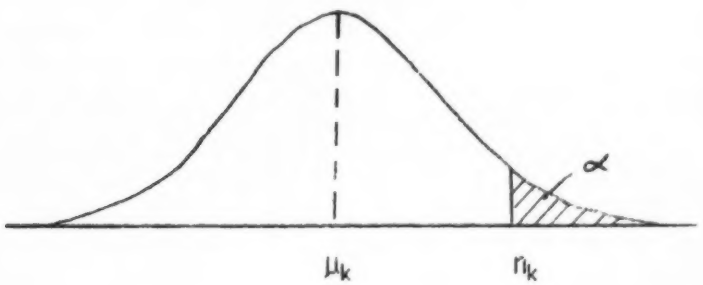
Ainsi, puisque les zones sont déterminées en fonction des nombres moyens, on peut s'attendre à ce que dans 50% des cas, le nombre de points à visiter dépasse la valeur n_k et qu'ainsi le véhicule n'ait pas le temps de tous les visiter. Pour palier à cette difficulté, nous pouvons déterminer les zones de façon à ce que, dans 85% des cas par exemple, le véhicule ait le temps de visiter tous les points.

4.1. Planification sans chevauchement des zones

On veut déterminer des zones plus petites de façon à ce que les véhicules aient le temps de visiter tous les clients de leur zone dans 85% des cas. Si n est le nombre de points de cueillette et de livraison à visiter, nous planifierons le découpage de la région avec $n^+ > n$ de façon à obtenir des zones plus petites. Nous utiliserons une procédure itérative pour déterminer le n^+ adéquat:

1- Nous choisissons un $n^+ > n$ à partir duquel on peut déterminer, par la méthode de la section 3, le zonage "optimal" i.e le nombre N_k de zones et le nombre n_k de points par zones dans le $k^{ième}$ anneau.

2 - Nous voulons déterminer le μ_k tel que $P[X>n_k] \leq \alpha$ avec $X \sim N(\mu_k,\sigma_k)$. Soit z_α tel que $P[z>z_\alpha] = \alpha$ avec $z \sim N(0,1)$;



μ_k peut être déterminé par la solution de l'équation

$$\mu_k + z_\alpha\sqrt{\mu_k(1-\mu_k/n^+)} = n_k$$

qui peut être transformée en équation quadratique:

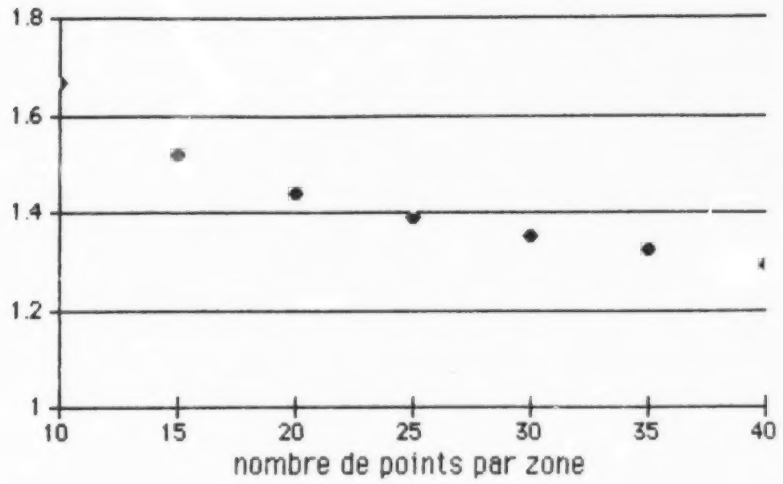
$$z_\alpha^2\mu_k(1-\mu_k/n^+) = (n_k - \mu_k)^2$$

3 - A partir des μ_k, on peut déterminer le nombre total de demandes pour l'ensemble de la région:

$$n' = \sum_k \mu_k N_k$$

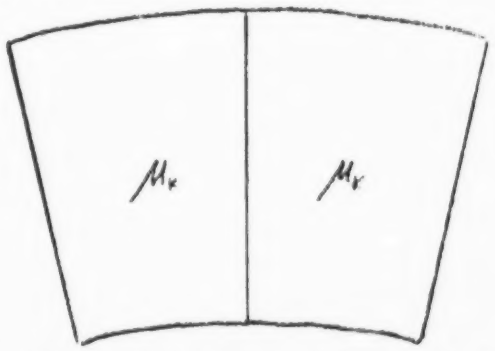
4 - Si n' n'est pas suffisamment près du n recherché, on recommence à l'étape 1 en augmentant ou diminuant n^+.

Le graphique suivant donne le rapport n_k/μ_k pour différentes valeurs de n_k. Nous avons trouvé les mêmes rapports quel que soit le nombre total de demande (n). Le graphique illustre donc l'augmentation des coûts (en termes de véhicules nécessaires) pour tenir compte de la variation journalière.



4.2. Planification avec chevauchement des zones

Pour étudier le chevauchement possible des zones, nous allons regrouper les zones deux par deux de façon à diminuer la variance et ainsi diminuer le nombre de véhicules nécessaires pour obtenir une couverture suffisante dans x% des cas.



Soit μ_k, le nombre moyen de points dans une zone du $k^{ième}$ anneau. La variance est donnée par

$$\sigma_k^2 = \mu_k(1-\mu_k/n).$$

Soit X_k la variable aléatoire du nombre de points dans deux zones adjacentes du $k^{ième}$ anneau, on a:

$$\mu(X_k) = 2\mu_k$$
$$\text{var}(X_k) = 2\mu_k(1-2\mu_k/n)$$

et si on divise en deux (ce qui correspond aux deux véhicules) le nombre de points, on obtient

$$\mu(X_k/2) = \mu_k$$
$$\text{var}(X_k/2) = (1/2)\mu_k(1-2\mu_k/n)$$

De façon générale, si on regroupe m zones adjacentes et que l'on permet la redistribution des points à visiter entre les m véhicules, la moyenne et la variance du nombre de points visités par chacun des véhicules sont:

$$\mu_m = \mu_k$$
$$\sigma_m^2 = (1/m)\mu_k(1-m\mu_k/n)$$

Ainsi, pour une couverture au niveau α, le nombre de points par zones est

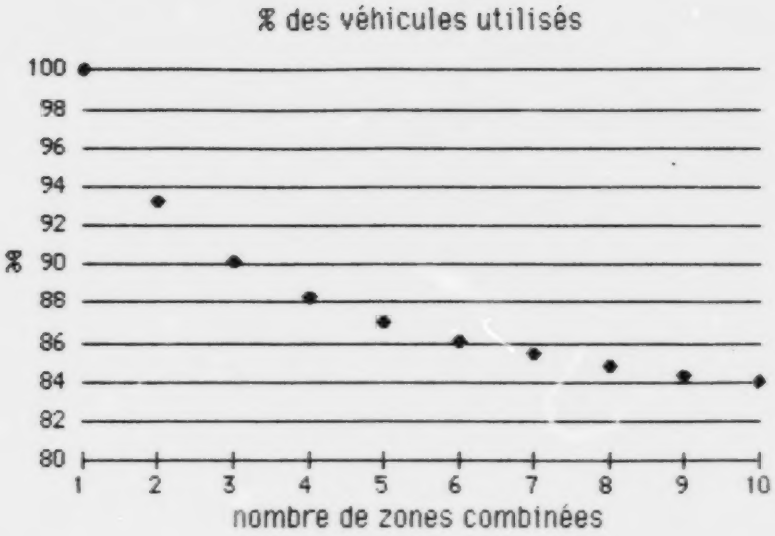
$$n_k = \mu_k + z_\alpha\sqrt{\mu_k(1-\mu_k/n)}$$

lorsqu'il n'y a pas chevauchement et

$$n_k' = \mu_k + z_\alpha\sqrt{(1/m)\mu_k(1-m\mu_k/n)}$$

lorsqu'il y a chevauchement de m zones.

Le gain sur le nombre de véhicules, lorsque l'on permet le chevauchement de 2 zones varie de 6 à 9% suivant n_k, le nombre de points par zone, et n, le nombre total de points. Le gain dû à l'ajout d'une zone supplémentaire diminue avec le nombre de zones conbinées. Le tableau suivant indique le % de véhicules utilisés par rapport au nombre initial (sans chevauchement) lorsque l'on permet le chevauchement de zones pour n=3000 et n_k=30.



On voit qu'il existe un compromis (trade-off) entre le gain à réaliser et la difficulté à confectionner les itinéraires. En effet, plus on permet de chevauchement, plus le problème devient difficile à résoudre et l'organisation difficile à gérer.

5. Conclusion

Nous avons développé une méthode analytique approximative de planification des zones de cueillette et livraison affectées aux véhicules d'une flotte. Cette méthode est simple à utiliser et permet d'évaluer la faisabilité de différents scénarios d'organisation d'un système de messagerie. De plus, nous avons adapté la méthode pour pouvoir tenir compte de la variabilité journalière de la demande. Enfin, dans la dernière section, nous avons évalué le gain possible au niveau du nombre de véhicules utilisés si l'on permet le chevauchement des zones de façon à diminuer la variance de la demande.

L'utilité de la méthode est reliée à l'importance d'une bonne planification stratégique. Le choix de la forme d'organisation la plus efficace peut entraîner, à notre avis, des gains de productivité plus importants que ceux permis par des décisions au niveau tactique (la confection au jour le jour des itinéraires, par exemple).

De plus, les résultats obtenus par notre méthode sont, malgré les approximations, plus représentatifs du comportement moyen sur une longue période que ceux d'un modèle tactique. Et, autre avantage, le développement, la calibration et l'utilisation d'un tel modèle sont certainement moins coûteux et moins longs à mettre au point, particulièrement si l'on veut tester plusieurs variantes d'organisations.

Les méthodes de confection de tournées utilisant principalement une approche de regroupement préalable par véhicule des points à visiter (cluster first), la forme des zones déterminée par notre méthode peut servir d'amorce à ce regroupement et donc, faciliter la confection des itinéraires, manuellement ou à l'aide d'un logiciel. En effet, une des caractéristiques des zones élaborées, est qu'il est aisée, en utilisant la stratégie de Daganzo [1984a], de confectionner manuellement les tournées. Pour une revue des algorithmes de confection des itinéraires, le lecteur pourra se référer à Bodin et al.[1983], Laporte et Nobert[1985] et Langevin[1986].

Bibliographie

BURNS, L.D., HALL, R.W., BLUMENFELD, D.E., DAGANZO, C.F.(1985): "Distribution Strategies that Minimize Transportation and Inventory Costs", Opns. Res. 33, 469-490.

DAGANZO, C.F.(1978): "An Approximate Analytic Model of Many-to-Many Demand Responsive Transportation Systems", Transpn. Res. Vol. 12, 325-333.

DAGANZO, C.F.(1984a): "The Length of Tours in Zones of Different Shapes", Transpn. Res. Vol. 18B(2), 135-145.

DAGANZO, C.F.(1984b): "Checkpoint Dial-a-Ride Systems", Transpn. Res. Vol. 18B(4/5), 315-327.

DAGANZO, C.F.(1984c): "The Distance Traveled to Visit N Points with a Maximum of C Stops per Vehicle: An Analytic Model and an Application", Trans. Sci. 18(4), 331-350.

DAGANZO, C.F.(1985a): "Supplying a Single Location from Heterogeneous Sources", Transpn. Res. Vol. 19B, 409-419.

DAGANZO, C.F.(1985b): "Modeling Distribution Problems with Time Windows", Report UCB-ITS-RR-85-4, Institute of Transportation Studies, University of California, Berkeley.

DAGANZO, C.F.(1985c): "Modeling Distribution Problems with Time Windows Part II: Two Customer Types", Report UCB-ITS-RR-85-5, Institute of Transportation Studies, University of California, Berkeley.

DAGANZO, C.F., NEWELL, G.F.(1986): "Configuration of Physical Distribution Networks", Networks 16, 113-132.

HAN A.F.(1984): "One-to-Many Distribution of Non-Storable Items: Approximate Analytic Models", Ph.D. Thesis, Dept. of Civil Eng., U. of C., Berkeley.

LANGEVIN, A.(1986): "Le problème de confection dynamique des tournées d'une flotte de véhicules", Ecole polytechnique de Montréal.

LAPORTE, G., NOBERT, Y.(1985): "Exact Algorithms for the Vehicle Routing Problem", Cahiers du GERAD, G-85-11, École des Hautes Etudes Commerciales de Montréal, 60 pp.

LARSON, R.C., ODONI, A.R.(1981): "Urban Operations Research", Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J.

NEWELL, G.F., DAGANZO, C.F.(1986a): "Design of Multiple-Vehicle Delivery Tours - I : A Ring Radial Network", Transpn. Res. Vol. 20B, 345-363.

NEWELL, G.F., DAGANZO, C.F.(1986b): "Design of Multiple-Vehicle Delivery Tours - II : Other Metrics", Transpn. Res. Vol. 20B, 365-376.

NEWELL, G.F., DAGANZO, C.F.(1986c): "Design of Multiple-Vehicle Delivery Tours - III : Valuable Goods", Transpn. Res. Vol. 20B, 377-390.

STEIN, D.(1978).: "Scheduling Dial-a-Ride Transportation Systems", Trans. Sci 12, 232-249